

New Keynesian Model

今井 亮一

平成 22 年 11 月 17 日

1 はじめに

NKモデルでは次の3式によって構成される。GDP (y_t) とインフレ率 (π_t)、名目金利 (i_t) は次の3式を満たす。

$$\text{IS 曲線: } y_t = E y_{t+1} - \frac{i_t - E_t \pi_{t+1}}{\theta}.$$

$$\text{NKPC: } \pi_t = E \pi_{t+1} + \frac{\rho^2}{1 - \rho} [\chi + (\lambda + \theta) y_t - (1 + \lambda) z_t].$$

$$\text{金利ルール: } i_t = \kappa_1 y_t + \kappa_2 \pi_t + \zeta_t.$$

ただしここで、 E は現時点から見た期待値を取るオペレーターである。 z_t , ζ_t はそれぞれ生産性と金利ショックを表す確率変数で、それぞれ独立した確率過程 AR(1) にしたがる。

$$z_{t+1} = \nu z_t + \epsilon_{t+1}, \quad 0 < \nu < 1$$

$$\zeta_{t+1} = \phi \zeta_t + \varepsilon_{t+1}, \quad 0 < \phi < 1$$

ただしここで ϵ , ε は平均ゼロ、分散一定のホワイトノイズである。通常、NKモデルのシミュレーションでは、モデルを定常上均衡の近傍で線形近似して、定常均衡において z_t や ζ_t が突然変化した時に、内生変数がどのように動いていくかを衝撃反応 (impulse response) として調べる。

3式のうち、金利ルールは任意である。したがって、導出の説明は必要ない。要するに、今期のGDP (y_t) とインフレ率 (π_t) を見て、中央銀行の裁量で名目金利 (i_t) が設定される、ということである。そこで以下ではまず、IS曲線とニューケインジアン・フィリップス曲線 (NKPC) の導出について説明する。

2 IS 曲線

代表的消費者は家計の通時的効用の現在価値を最大化する。効用関数は消費 c と貨幣保有 m 、労働供給 l に依存する。ただしここで m_t は名目貨幣保有

量を物価水準で割った「実質貨幣残高」である。このように、貨幣からの効用が直接効用関数に入ってくるような形を、「money-in-the-utility-function」と呼ぶ。具体的には、家計の一期当たりの効用（即時効用）は、次のように書ける。

$$u(c_t, m_t) = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{m_t^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{l_t^{1+\lambda}}{1+\lambda}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1, \lambda > 1.$$

このようなタイプの効用関数を CRRA (constant relative risk aversion) 型と言う。さて、家計は次の問題を解く。

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{m_t^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{l_t^{1+\lambda}}{1+\lambda} \right]$$

ここで E_0 は、計画時点（時点ゼロ）で操作する期待値オペレーターである。ただし制約条件として、

$$m_t + b_t + c_t = \frac{(1 + i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1} + \psi_{t-1}}{1 + \pi_t} + w_t l_t$$

が満たされなければならない。この式のことを推移式と呼ぶ。ここで b_t は t 期に購入する債券（貯金と考えてよい）であり、 i_t は t 期に貯金する場合の名目金利である。まず右辺第 1 項は、前期のポートフォリオ（債券 b_{t-1} と現金 m_{t-1} ）が今季にかけてどのように増えたかを表している。ここで ψ_{t-1} は前期末にもらった配当（企業収益の分配）である。前期の物価で評価された金融資産を今期に実質化するために、粗インフレ率 $(1 + \pi_t)$ で割っていることに注意してほしい。右辺第 2 項は今期の労働所得 $w_t l_t$ であるが、ここで賃金率 $w_t = W/p_t$ は今期の物価水準を 1 として実質化されている。そのお金を使って家計が、新たに債券 (b_t) を買い、消費 (c_t) して、残りを現金 (m_t) として保有することを表しているのが左辺であり、今期の物価水準で実質化されている。さて、この式は、資産の総額として $a_t = b_t + m_t$ という変数を導入し、次のように書き換えると便利である。

$$a_t + c_t = \frac{(1 + i_{t-1})a_{t-1} - i_{t-1}m_{t-1} + \psi_{t-1}}{1 + \pi_t} + w_t l_t$$

さて、この問題はラグランジュ乗数法を用いて解くことができる。

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{m_t^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{l_t^{1+\lambda}}{1+\lambda} + \xi_t \left\{ \frac{(1 + i_{t-1})a_{t-1} - i_{t-1}m_{t-1} + \psi_{t-1}}{1 + \pi_t} + w_t l_t - (a_t + c_t) \right\} \right]$$

ラグランジアンを m_t と a_t と c_t に関して微分する時には、 m_t と a_t が次の期にも出てくることに注意しなければならない。 m_t と a_t が出てくるところを

抜き出し、 β^t で割ると、次のようになっている。

$$\begin{aligned} \frac{L}{\beta^t} = & \dots + \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{m_t^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{l_t^{1+\lambda}}{1+\lambda} \\ & + \xi_t \left\{ \frac{(1+i_{t-1})a_{t-1} - i_{t-1}m_{t-1} + \psi_{t-1}}{1+\pi_t} + w_t l_t - (a_t + c_t) \right\} \\ & + \beta \left[\frac{c_{t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{m_{t+1}^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{l_{t+1}^{1+\lambda}}{1+\lambda} \right. \\ & \left. + \xi_{t+1} \left\{ \frac{(1+i_t)a_t - i_t m_t + \psi_t}{1+\pi_{t+1}} + w_{t+1} l_{t+1} - (a_{t+1} + c_{t+1}) \right\} \right] + \dots \end{aligned}$$

さて、効用最大化の一階条件を書くと、次のようになる。まず c_t について、

$$c_t^{-\theta} = \xi_t. \quad (1)$$

次に l_t について

$$l_t^\lambda = \xi_t w_t \quad (2)$$

次に m_t について、

$$m_t^{-\mu} = E_t \frac{\beta i_t}{1+\pi_{t+1}} \xi_{t+1}. \quad (3)$$

最後に a_t について、

$$\xi_t = \frac{\beta(1+i_t)}{1+\pi_{t+1}} \xi_{t+1} \quad (4)$$

(4) に (1) を代入することによって、いわゆる「オイラー方程式」を得る。

$$c_t^{-\theta} = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}(1+i_t)}{1+\pi_{t+1}} c_{t+1}^{-\theta}.$$

両辺の対数を取ると、

$$-\theta \ln c_t = \ln \beta + \ln(1+i_t) - E_t \ln(1+\pi_{t+1}) - \theta E_t \ln c_{t+1}$$

ここで任意の x につき x が十分小さい場合には $\ln(1+x) \simeq x$ であることに注意しよう。すると、

$$-\theta \ln c_t = \ln \beta + i_t - E_t \pi_{t+1} - \theta E_t \ln c_{t+1}$$

さらに各変数を定常状態からの乖離と捉えたと、定数項は無視できるので、結局、次を得る。

$$E_t \ln c_{t+1} - \ln c_t = \frac{i_t - E_t \pi_{t+1}}{\theta}.$$

これは対数表示のオイラー方程式であるが、同時に、資本が存在しない経済では、I S 曲線でもある。なぜなら生産物はすべて消費されるからである。したがって、ここに、NKモデルの第1の構成式である I S 曲線を次のように得る。

$$E_t \ln y_{t+1} - \ln y_t = \frac{i_t - E_t \pi_{t+1}}{\theta}. \quad (5)$$

3 ニューケインジアン・フィリップス曲線 (NKPC)

NKPCはNKモデルでもっとも重要な構成要素である。これの「発見」によってNKモデルが生まれたと言っても過言ではない。大事な式であるだけに、その導出もかなり複雑である。

まず企業の費用最小化問題から出発しよう。この経済では、消費者は多様で差別化された財を幅広く満遍なく消費している。ただし、個々の財の生産者（企業）は少々独占力を持ちつつ、お互いに競争している。家計の最適消費計画において、もしすべての企業が同じ価格をつけるならばすべての財が等量消費されることが示される（導出は省略）。

さて、ある財 i の生産者の費用最小化問題を考える。「双対性 (duality) 定理」として知られるように、企業の利潤最大化問題の裏には費用最小化問題がある。あらかじめ一定の量を生産するための雇用水準を求める費用最小化問題を解いておけば、企業がある量を生産する場合に必要な最低限のコストがわかる。費用最小化問題とは、具体的には次のようになる。

$$\min_{n(i)} : \frac{W}{p} n(i) + \phi_i [y(i) - zn(i)].$$

ただしここで ϕ_i はラグランジュ乗数であり、 W, p はそれぞれ名目賃金と平均価格である。したがって $\frac{W}{p}$ は実質賃金を表す。さて、生産者 i は、生産関数 $zn(i)$ を使用して、 $n(i)$ を雇用して $y(i)$ を生産する。その時、必要最小限のコスト $\frac{W}{p} n(i)$ はいくらになるだろうか。また、雇用量 $n(i)$ はいくらになるだろうか。この問題の一階条件は次のようになる。

$$\phi_i = \frac{W}{pz}.$$

これはラグランジュ乗数が雇用 1 単位あたりの限界費用に等しいことを表す。この問題は線形なので、解は自明で、雇用量、総コストはそれぞれ次のようになる。

$$n(i) = \frac{y(i)}{z}, \quad \frac{W}{p} \frac{y(i)}{z} = \phi_i y(i).$$

その結果、平均価格でデフレートした企業の利潤は次のようになる。

$$\max : \Pi_i = \left(\frac{p_i}{p} \right) y(i) - \phi_i y(i).$$

さてここで、すべての企業は独占的競争 (monopolistic competition) 的に行動する。すなわち、平均価格 p を所与として、家計の財 i への需要関数を利用して利潤を半ば独占的に最大化する。需要曲線は次のように与えられる。

$$y(i) = \left(\frac{p_i}{p} \right)^{-\eta} y.$$

ただしここで $y = c$ であり、家計の総消費である。また、 $\eta > 1$ は各財に対する需要の代替弾力性である。この需要曲線の導出はここでは紹介しないが、

独占的競争のモデルにおいて広く知られている性質を利用している。詳しくは、Blanchard and Kiyotaki (1987) を参照されたい。さて、企業の利潤最大化は次のように書き換えられる。

$$\max_{p_i} : \Pi_i = \left[\left(\frac{p_i}{p} \right)^{1-\eta} - \phi_i \left(\frac{p_i}{p} \right)^{-\eta} \right] y.$$

この問題の解は、

$$\frac{p_i}{p} = \frac{\eta}{\eta-1} \phi_i \quad (6)$$

である。これはよく知られた独占的競争企業の「マークアップ原理」であり、代替の弾力性 η が大きくなるとマークアップは小さくなり、いずれ 1 に収束する。つまり、財同士の代替性が高まるほど価格は限界費用に近づいていくということである。

さて、NKPC 導出の核心である「カルボ型価格設定 (Calvo Pricing)」を説明しよう。まずこの経済においてがすべての企業がいつでも価格を変更できるわけではない。このように一部の企業しか価格を変更できなければ、経済全体の平均価格は粘着的にしか変化しない。具体的には、任意の一時点において企業が価格変更できる確率は $\rho (< 1)$ である。すると、大数の法則により、経済全体で価格変更できる企業の割合は ρ 、変更できない企業の割合は $1 - \rho$ である。

t 期において価格変更できる企業がつける価格を q_t とすると、前期の平均価格が p_{t-1} である場合、 t 期の平均価格は q_t と p_{t-1} を ρ で加重平均したものになるはずである。

$$p_t = \rho q_t + (1 - \rho) p_{t-1}. \quad (7)$$

さて、仮に価格が自由に変更できる場合には企業は (6) にしたがって価格を付ける。これを対数表現すると、

$$\ln p_i = \ln p + \ln \chi + \ln \phi_i$$

となる。ただしここで、 $\chi = \eta/(\eta-1)$ である。

突然だが、以下では価格はすべて対数表示とする。加藤涼も同じように突然やっているので文句言わないように。例えば、いつも自由に価格変更できる企業がつける価格は、

$$p_i = p + \chi + \phi_i$$

と、これからは書くことになる。ついでだから、このような時の最適価格を p^* と表示することにしよう。すると、

$$p^* = p + \chi + \phi$$

である。

さて、たまたま価格が変更できる状況であっても、企業は、いつでも自由に価格が変更できる場合につける価格をそのままつけるわけではない。というのも、たまにしか変更できないということはわかっているので、それをあらかじめ考慮した価格を付ける必要がある。そのような価格 q がどのようなものであるかは、複雑な最適化問題を解かなければわからないが、答えはずっとシンプルである。要するに、制約なしの最適価格 p^* と、今期は変更できずに来期同じ問題に直面する場合につける価格 q_{t+1} の、加重平均となる。

$$\begin{aligned} q_t &= \rho p_t^* + (1 - \rho) E_t q_{t+1} \\ &= \rho(p_t + \chi + \phi_t) + (1 - \rho) E_t q_{t+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

さてインフレ率 π と個別の価格変化率 Δq を次のように定義する。

$$\pi_t = p_t - p_{t-1}, \quad \Delta q_t = q_t - q_{t-1}$$

すると、(8) から、

$$\begin{aligned} E_t \Delta q_{t+1} &= E_t q_{t+1} - q_t \\ &= E_t q_{t+1} - [\rho(p_t + \chi + \phi_t) + (1 - \rho) E_t q_{t+1}] \\ &= \rho E_t q_{t+1} - \rho(p_t + \chi + \phi_t) \end{aligned}$$

また、(7) から、

$$\begin{aligned} \pi_t &= p_t - p_{t-1} \\ &= \rho q_t + (1 - \rho) p_{t-1} - p_{t-1} \\ &= \rho q_t - \rho p_{t-1} \end{aligned} \quad (9)$$

これらから

$$E_t \Delta q_{t+1} = \rho E_t q_{t+1} - \rho p_t - \rho(\chi + \phi_t) = E_t \pi_{t+1} - \rho(\chi + \phi_t) \quad (10)$$

つまた、(9) から、

$$E_t \pi_{t+1} = \rho E_t \Delta q_{t+1} + (1 - \rho) \pi_t$$

これに (10) を代入することによって、

$$E_t \pi_{t+1} = \rho[E_t \pi_{t+1} - \rho(\chi + \phi_t)] + (1 - \rho) \pi_t$$

すなわち、限界費用 ϕ_t で表示したNKフィリップス曲線を次のように得る。

$$\pi_t = E_t \pi_{t+1} + \frac{\rho^2}{1 - \rho} (\chi + \phi_t). \quad (11)$$

我々が知りたいのはGDP (y) とインフレ率の関係である。(2) から (1) を使って ξ_t を消去し、均衡条件 $c_t = y_t$ を踏まえると、すると、家計の労働供給 l は、次のような式を満たす。

$$l_t^\lambda = y_t^{-\theta} \frac{W_t}{p_t}.$$

これを対数表示すると、

$$\lambda l_t + \theta y_t = w_t \equiv \ln \left(\frac{W_t}{p_t} \right).$$

生産関数 $y = l + z$ を用いて l を消去すると、

$$w_t = \lambda(y_t - z_t) + \theta y_t = (\lambda + \theta)y_t - \lambda z_t$$

限界費用が $\phi_t = w_t - z_t$ であったことを思い起こし、(11) から ϕ_t を消去することによって、GDP表示のNKフィリップス曲線を次のように得る。

$$\pi_t = E_t \pi_{t+1} + \frac{\rho^2}{1-\rho} [\chi + (\lambda + \theta)y_t - (1 + \lambda)z_t]. \quad (12)$$

ここで、 $0 < \rho < 1$ であるから、確かに、GDPとインフレ率の正の関係が得られる。 ρ が増加し1に近づくと（価格を変更できる企業が増えると）、 $\rho^2/(1-\rho)$ は無限大に発散し、フィリップス曲線は垂直になってしまう。すなわち、これは長期総供給曲線（AS曲線）が垂直であるという事実の確認に他ならない。

4 Blanchard-Kahn(1980)の方法

NKモデルをはじめ動学的マクロ経済モデルでは、どんなモデルでも必ず解があるというものではない。例えば、発散してしまうような経路しかない場合には解は存在しない。したがって、経路の安定性を担保する条件を知ることがどうしても必要になる。経済モデルには、変数として先決変数 (predetermined variable) とジャンプ変数 (jump variable) があり、例えば資本は前者、消費は後者に相当する。たとえショックが起こっても先決変数は推移式にしたがって少しずつ変化するが、ジャンプ変数は飛び移る。その他、例えば、名目貨幣は先決変数だが、実質貨幣バランスは、物価水準がジャンプするので、ジャンプ変数である。ジャンプ変数には、消費のように操作変数である場合もあれば、物価のように均衡で決まる変数もある。いずれにしても、ショックが起こった時にジャンプ変数が適当な位置にジャンプして、その後は先決変数が少しずつ緩慢に変化してやがて安定的な定常状態に到達する場合には、均衡経路が存在すると言う。

動学マクロ経済学では、ほとんどの場合、モデルを定常上均衡の近傍で線形近似して、定常均衡で起こったショックの局所的な効果を、衝撃反応 (impulse

response) として分析する。したがって、あらかじめ線形システム、要するに行列のお勉強が必要となる。

次のような線形システムを考える。

$$x_{t+1} = Ax_t$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x_t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

である。

さて、行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がすべて異なる実数である場合には、固有ベクトル v_1, v_2, \dots, v_n を列成分とする行列 $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ は逆行列を持ち、次を満たす。

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \equiv \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] = B$$

このような対角行列 B を見出すことを「対角化 (diagonalization)」と言う。

さて、対角行列 $B = P^{-1}AP$ において、

$$PBP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^k &= (PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1}) = PB^kP^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

となる。そこで線形システム

$$x_{t+k} = A^k x_t = PB^kP^{-1}x_t$$

において、新たに $y_t \equiv P^{-1}x_t$ と定義すれば、

$$y_{t+k} = B^k P^{-1}x_{t+k} = B^k y_t$$

と書き直される。

さてここで、対角行列 B を、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ の絶対値が 1 未満のものからなる B_{11} と、1 以上のものからなる B_{22} に分けよう。そして y についてもそれにしたがって並べ替えると、

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+k} \\ y_{2,t+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} \quad P^{-1}x_{t+k} = B^k y_t.$$

ここでシステムは、 k を大きくすると収束する変数 $y_{1,t}$ と発散する変数 $y_{2,t}$ に分割される。 x 表示に戻すと、

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t+k} \\ x_{2,t+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix}$$

となるが、分割して書くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} M_{11}x_{1,t+k} + M_{12}x_{2,t+k} &= B_{11}^k [M_{11}x_{1,t} + M_{12}x_{2,t}] \\ M_{21}x_{1,t+k} + M_{22}x_{2,t+k} &= B_{22}^k [M_{21}x_{1,t} + M_{22}x_{2,t}] \end{aligned}$$

ここで第 1 行は、 B_{11} が 1 未満の固有値からなる対角行列だから、いずれ収束する。これに対して第 2 行は、すべての t につき $M_{21}x_{1,t} + M_{22}x_{2,t} = 0$ でない限り、 k が増加すると発散してしまう。したがって、任意の t について、

$$x_{2,t} = -M_{22}^{-1}M_{21}x_{1,t} \quad (13)$$

であることが均衡存在の条件である。さてここで、変数 $x_{1,t}$ を先決変数 (pre-determined variable)、変数 $x_{2,t}$ をジャンプ変数 (jump variable) と呼ぶことにする。すなわち、変数 $x_{1,t}$ は絶対値が 1 未満の固有値に対応しているので、少しずつ変化してやがて定常値に収束する。他方、変数 $x_{2,t}$ は各期ごとに (13) を満たすようにジャンプする。(13) を政策関数 (policy function) と呼ぶこともある。

この結果は、Blanchard and Kahn (1980) によって、次のように整理された。

定理 1 (Blanchard-Kahn) 1. 発散する固有値の数がジャンプ変数の数より大きければ、解は存在しない。

2. 発散する固有値の数がジャンプ変数の数とちょうど等しければ、一意的な解が存在する。

3. 発散する固有値の数がジャンプ変数の数よりも小さければ、複数均衡が存在し、解は非決定となる。

ここで、「非決定性」はマクロ経済政策上あまり好ましくない性質である。というのは、均衡が複数あるので今どの均衡にいるのかわからず、好ましい政策が決定できなくなるからである。

以上の分析において重要なことは、経済モデルにおいては、先決変数とジャンプ変数の区別は自動的に決まるものではなく、あくまでも経済に関する筋道の通った理解に基づいて行われるということである。資本や貨幣ストック、国債発行残高などは少しずつ変化するので先決変数である。これに対して、消費や投資、物価水準、実質貨幣残高、新規国債発行量などは、その都度、大きく変化すると考えられる。このように、経済学的吟味に基づいて選んだジャンプ変数の数が、発散する固有値の数と一致しなかったら、あらためてモデルを設計し直す必要がある。

参考文献

- [1] 加藤涼 (2006) 『現代マクロ経済学講義』 (東洋経済新報社)
- [2] Blanchard, Olivier, and Charles Kahn (1980) “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica* 48(5), 1305-1311.
- [3] Blanchard, Olivier, and Nobuhiro Kiyotaki (1987) “Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand,” *American Economic Review* 77, vol.4, 647-666.
- [4] McCandles, George (2008) *The ABCs of RBCs*, Harvard University Press