

内生的リスクとレバレッジ

今井亮一

平成 23 年 1 月 18 日

1 はじめに

以下は、次の本の 2 章、3 章に基づく講義ノートである。

Hyun Song Shin (2010) *Risk and Liquidity*, Oxford UP.

2 Value at Risk

許容可能な最大損失を Value at Risk (VaR) と呼ぶことにしよう。数式で書くと、信頼水準 α に対して、資産価値 W が当初の水準 W_0 より VaR だけ値下がりする確率が $1 - \alpha$ である、と定義される。

$$\Pr(W < W_0 - VaR) \leq 1 - \alpha$$

なぜ Value at Risk が重要であるかという、ほとんどの投資家（金融機関）が、単なる利潤最大化ではなく、どんなに損失が大きくても倒産しない、という制約条件の下で投資を行っているからである。以下では、倒産回避の制約条件化での投資がどのように決まるかを考える。投資対象は、現金とリスクのある資産の 2 種類としよう。現金保有は c で表される。リスク資産の価格を p で表すと、リスク資産の収益率は \tilde{r}_{t+1} 次のように定義される。

$$p_{t+1} = (1 + \tilde{r}_{t+1})p_t$$

ただしここで、添字の t は時間（期）を表す。 \tilde{r}_{t+1} は各時点で独立に平均 μ 、分散 σ^2 で分布するとしよう。リスク資産の保有高を y で表すと、投資家の予算制約式は次のようになる。

$$p_t y_t + c_t = e_t$$

ただしここで e_t は自己資本（元手）である。現金保有 c_t や資産保有 y_t は負の値を取ることもでき、それぞれ、借入れや空売りを表す。

さて、来期の自己資本は、今期、リスク資産の価格がどう動くかで決まる。すなわち、

$$\begin{aligned} e_{t+1} &= p_{t+1}y_t + c_t \\ &= (1 + \tilde{r}_{t+1})p_t y_t + c_t \\ &= (1 + \tilde{r}_{t+1})p_t y_t + e_t - p_t y_t \\ &= \tilde{r}_{t+1}p_t y_t + e_t \end{aligned}$$

倒産とは $e_{t+1} \leq 0$ となることである。言いかえれば、

$$\tilde{r}_{t+1} \leq -\frac{e_t}{p_t y_t}$$

である場合に、投資家は倒産する。さて、収益率 \tilde{r}_{t+1} の VaR を標準偏差 σ の実数倍、例えば $\phi\sigma$ と表すことにしよう。すると、

$$\Pr(\tilde{r}_{t+1} \leq \mu - \phi\sigma) \leq 1 - \alpha$$

すなわち、収益率の期待値 μ より $\phi\sigma$ だけ損する確率は $1 - \alpha$ である。したがって、倒産を回避したい投資家が保有するリスク資産の上限 $p_t y_t$ は、

$$-\frac{e_t}{p_t y_t} = \mu - \phi\sigma$$

を満たす。すなわち、

$$p_t y_t = \frac{e_t}{\phi\sigma - \mu}$$

となる。また、いわゆるレバレッジ、すなわち「危険資産の自己資本に対する比率」の上限は、

$$\frac{p_t y_t}{e_t} = \frac{1}{\phi\sigma - \mu}$$

と書ける。

3 内生的リスク

投資家が倒産回避を制約条件として行動する時、均衡においてリスク資産の価格がどのように決まるのかを考えよう。

リスク資産の収益 w が区間 $[q - z, q + z]$ において一様分布するとしよう。この一様分布する変数 w の密度関数は $f(w) = 1/(2z)$ であるから、期待値と分散はそれぞれ、

$$E(w) = \int_{q-z}^{q+z} \frac{w}{2z} dw = \left[\frac{w^2}{4z} \right]_{q-z}^{q+z} = \frac{(q+z)^2 - (q-z)^2}{4z} = q$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[w - E(w)]^2 = E(w^2) - E(w)^2 = \int_{q-z}^{q+z} \frac{w^2}{2z} dw - q^2 \\ &= \left[\frac{w^3}{6z} \right]_{q-z}^{q+z} - q^2 = \frac{(q+z)^3 - (q-z)^3}{6z} - q^2 = \frac{z^2}{3}\end{aligned}$$

である。ポートフォリオ W は次のように定義される。

$$W \equiv wy + (e - py)$$

ここで w は確率変数であることに注意されたし。

さて、二種類の投資家がいる経済を考える。受身 (passive) の投資家と、積極的 (active) な投資家がいるとする。受身の投資家は危険回避的であり、期待値から分散の一定割合を差し引いたものを最大化するように行動する。受身の投資家の効用関数は次のように書ける。

$$\begin{aligned}U &= E(W) - \frac{\sigma_w^2}{2\tau} \\ &= qy + (e - py) - \frac{y^2 z^2}{6\tau}\end{aligned}$$

ただしここで τ は「リスク許容度」を表す。効用最大化の一階条件は、

$$q - p - \frac{yz^2}{3\tau} = 0$$

であり、その結果、受身の投資家からのリスク資産に対する需要は、

$$y_P = \begin{cases} \frac{3\tau}{z^2}(q - p) & \text{if } q > p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

これに対して積極的な投資家は危険中立的であるが、倒産しないという制約条件にしたがって投資する。彼の行動は次のように書ける。

$$\max E(W) \quad \text{subject to } VaR \leq e$$

ここで、積極的な投資家が許容できる最大の損失 (VaR) はいくらだろうか。彼は、自己資本 e を所与として、金を借りられるだけ借りて投資すればいくらでもポートフォリオの期待値を大きくすることができる。しかし、借り過ぎると、最悪の場合、つまり収益率が $q - z$ の時、倒産してしまう。したがって、彼がリスク資産に投資できる上限 y は次の式を満たす。

$$\underbrace{py - e}_{\text{借入額}} < \underbrace{(q - z)y}_{\text{期末の資産価値}}$$

彼がこの上限まで投資することは明らかである。最悪の場合に借金がぎりぎり返せればよいというのが彼にとっての制約条件だからである。したがって、積極的な投資家のリスク資産に対する需要は、次のようになる。

$$y_A = \frac{e}{z - (q - p)}$$

リスク資産の供給は所与であり、 S で与えられるとすると、リスク資産市場の均衡条件は $y_P + y_A = S$ 、または

$$\frac{3\tau}{z^2}(q-p) + \frac{e}{z-(q-p)} = S$$

である。これを満たすようにリスク資産の取引価格 p が決まり、同時に二種類の投資家のリスク資産保有量 y_P 、 y_A が決まる。

さて、景気がよくなる、すなわちリスク資産の期待収益率が上がる時、リスク資産への期待投資収益率はどのように変化するだろうか。資産市場の面白いところは、資産の本源的価値（ファンダメンタル）が上がれば、皆が買おうとするので価格が上がってしまい、目論見通りの投資収益が上がらないことである。まず期待投資収益率は

$$\frac{q-p}{p} = \frac{q}{p} - 1$$

である。一方、より操作が容易な指標として、リスク・プレミアム π は次のように定義される。

$$\pi = \frac{q-p}{q}$$

リスク・プレミアムは資産の本源的価値を分母にして見た収益率である。

命題 1 資産の本源的価値 q が上昇すると、リスク・プレミアムは低下する。
証明. 試験問題？ ■

これは実に面白い結果である。景気がよくなってから株式投資を始める人は往々にしてもうからないか、場合によっては損をする。しかし、受身で慎重な投資家は、景気がよくなるとむしろ株式投資の割合を落とす。なぜなら景気がよくなると積極的な投資家がどんどん買ってくるので株価が上がってしまい、期待投資収益率が下がってしまうからである。下がってしまうけれど、すでにかなりもうかっているの、高いうちに売り抜けるのである。

命題 2 省略。

次に、景気がよくなり資産の本源的価値が上がると、積極的投資家のレバレッジはどうなるだろうか。レバレッジは次のように与えられる。

$$\frac{py}{e} = \frac{p}{e} \frac{e}{z-(q-p)} = \frac{p}{z-(q-p)}$$

命題 3 資産の本源的価値 q が上昇すると、レバレッジは上昇する。
証明. 不十分ではないか？ ■

4 ヘッジファンドの投資戦略

2010年大晦日のテレビを見ていたら、池上彰氏が6時間半のマラソン番組で合計108個の質問に答える、という企画をやっていた。その中で「ヘッジファンドって何ですか？」という質問があり、池上さんは「ヘッジファンドとは、そもそも金持ちの巨額の資産を増えなくてもいいから減らさないように管理するためのファンドだったが、その後、むしろ大きくリスクを取って資産を増やす戦略を取るヘッジファンドも出てきました」と解説していた。思わず、「そうだったのか」と大きく頷いてしまいました。

さて、そのような性格の違うファンドの行動を、統一的に説明するモデルを考えよう。その結果、倒産しない限りできるだけもうかるようなポートフォリオを組むヘッジファンドは、リスク回避的な投資行動を取る受身のファンドの行動と本質的に変わらないが、倒産だけ避ければよいという制約条件のおかげで、より高いリスク許容度を取っているにすぎないことがわかる。リスク許容度は、効用関数のパラメーターではなく、倒産しない範囲でできるだけ高い収益を求める顧客の要求に基づいて決まると考えられるのである。

次のような2種類のリスク証券と現金に投資するヘッジファンドを考えよう。各証券の収益率 r_i , $i = 1, 2$, の期待値と分散、共分散はそれぞれ、 μ_i , σ_i , σ_{12} , と表される。現金の収益率は r_0 でノーリスクである。ポートフォリオの収益率は r と書く。各資産への投資金額は、現金に c 、リスク証券1に a_1 、リスク証券2に a_2 である。自己資本はこれまで通り e で表される。したがって、

$$a_1 + a_2 + c = e$$

である。

最初に、危険回避的な、リスク許容度 τ のヘッジファンドを考える。ヘッジファンドの利得は次のように書ける。

$$\begin{aligned} U &= E(r) - \frac{1}{2\tau} \text{Var}(r) & (1) \\ &= cr_0 + a_1\mu_1 + a_2\mu_2 - \frac{1}{2\tau} \text{Var}(cr_0 + a_1r_1 + a_2r_2) \\ &= (e - a_1 - a_2)r_0 + a_1\mu_1 + a_2\mu_2 - \frac{1}{2\tau} (a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + 2a_1a_2\sigma_{12}) \\ &= er_0 + a_1(\mu_1 - r_0) + a_2(\mu_2 - r_0) - \frac{1}{2\tau} (a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + 2a_1a_2\sigma_{12}) \end{aligned}$$

U を a_1 , a_2 に関して最大化するための一階の必要条件から、次を得る。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \tau \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 - r_0 \\ \mu_2 - r_0 \end{bmatrix}$$

ただしここで、 Σ は分散-共分散行列である。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

たとえば、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= 0.25 \begin{bmatrix} 0.04 & 0.037 \\ 0.037 & 0.04 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.03 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.2619 \\ -1.9047 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これは、1億円の自己資本を持つヘッジファンドであれば、2億2619万円を証券1に投資し、1億9047万円の証券2を空売りし、 $1 - 2.2619 + 1.9047 = 6428$ (万円)の現金を持つのが最適であることを意味する。大雑把に言えば、期待収益の低い証券を空売りして得た現金を、より期待収益の高い証券につぎ込んだ上、危険回避のため若干の現金を残すのがよい、ということである。この時、レバレッジは、

$$\frac{2.2619 + 0.6428}{1} \simeq 2.9$$

である。

次に、Value at Risk を制約条件として投資するヘッジファンドを考える。予想される最大の損失が自己資本を上回らないというのが制約条件だから、たとえば、ポートフォリオの標準偏差の定数倍が自己資本を上回らないこと、すなわち、

$$\alpha \sigma_r \leq e$$

を制約条件として考えよう。便宜上、二乗して、

$$\sigma_r^2 \leq \left(\frac{e}{\alpha}\right)^2$$

を制約条件として課そう。この時、ヘッジファンドの問題は、ラグランジュ乗数を λ として次のラグランジアンを最大化する問題として書ける。

$$\begin{aligned} L &= E(r) - \lambda \left(\sigma_r^2 - \left(\frac{e}{\alpha}\right)^2 \right) \\ &= E(r) - \lambda \sigma_r^2 + \lambda \left(\frac{e}{\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

直ちにわかるのは、最後の項は投資金額 a_i , $i = 1, 2$ に依存しないので、一階の条件では無視できることである。すると、これは受身のヘッジファンドの問題 (1) において、

$$\lambda = \frac{1}{2\tau}$$

と置き換えたものに他ならない。したがって、解の形は同じであり、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 - r_0 \\ \mu_2 - r_0 \end{bmatrix}$$

面倒くさいので $r_0 = 0$ としよう。さてここで、まだ λ が内生変数である。 λ は制約条件を等号で解くことによって得られる。すなわち、まず

$$\sigma_r^2 = a' \Sigma a = \frac{1}{4\lambda^2} \mu' \Sigma^{-1} \mu$$

であるから、制約条件は

$$\frac{1}{4\lambda^2} \mu' \Sigma^{-1} \mu = \left(\frac{e}{\alpha} \right)^2$$

と書ける。ここから直ちに、

$$\lambda = \frac{\alpha}{2e} \sqrt{\mu' \Sigma^{-1} \mu}$$

を得る。したがって最適なポートフォリオは、

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \tau \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 - r_0 \\ \mu_2 - r_0 \end{bmatrix}$$

と与えられる、ただしここで、

$$\tau = \frac{e}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\mu' \Sigma^{-1} \mu}}$$

であるが、これは、自己資本 e が大きいほど、よりリスク許容度 τ が高まることを表している。すなわち、自己資本が大きいヘッジファンドほど、あたかも効用関数においてよりリスク許容度が高い投資家のようにふるまう。

以上、見てきたように、Value at Risk を制約条件として行動するヘッジファンドは、本質的にはリスクを回避しようとするヘッジファンドと変わらない。ただ、リスクの許容度が、自己資本が大きいほど高まるという違いがある。前節で見たように、景気がよくなり資産の本源的な価値が上がると、それにつれて自己資本は大きくなるから、よりいっそうリスクを許容できるようになって、さらにリスク資産への需要が高まってしまう。すなわち、リスクは内生的なのである。

以上のモデルでは、二つの証券の共分散が高まると、期待収益率の高い証券を「買い持ち」し、低い証券を売り持ちするというのが、リスク許容度にかかわらず有利な投資戦略になる。これは、1998年に起こったLTCMの破綻の原因について、有力な示唆を与える。

当時、LTCMのポートフォリオは、金利の低いドイツ国債を売り持ちして、金利の高いイタリア国債を買い持つ、というものであった。ユーロ統合を控え、両国の金利は同一方向に動く、すなわち正の相関は強まると予想されていた。これはまさに上記のポートフォリオが最適であることを示しており、実際、LTCMはそのような戦略で大儲けしていたのである。しかし、アジア通貨危機の発生が事態を大きく変えた。イタリア国債の収益率（金利＋キャピタル・ゲイン）は低下し、ドイツ国債の収益率は上昇してしまった。すなわち、両者の相関が低下したのである。その結果、当初採用されたポートフォリオは最悪となり、大儲けどころか大損してしまい、最終的に倒産したが、ニューヨーク連銀の仲介で救済されたのである。