

最適金融政策

今井亮一

平成 23 年 1 月 25 日

1 はじめに

以下は、次の本の 5 章、6 章に基づく講義ノートである。

加藤涼 (2006) 『現代マクロ経済学講義』東洋経済新報社.

2 最適金融政策（伝統的ケインジアン・モデル）

2.1 最適テイラー・ルールの導出

中央銀行の最適化問題は、次のように書ける。

$$\min E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j [y_{t+j}^2 + \theta(\pi_{t+j} - \pi^*)^2]$$

ただしここで、 E_t は期待値オペレーターである。 y は期待値ゼロの GDP ギャップであり、 $E_t y_{t+j}^2$ は GDP の分散を表す。 π^* はインフレ率の目標値、すなわちインフレ・ターゲットであり、 $(\pi_{t+j} - \pi^*)^2$ は目標値から見たインフレ率の分散を表す。 θ は GDP に対してインフレ率の分散をどれだけ重視するかを表す「ウェイト」である。すなわち、中央銀行は、GDP ギャップの分散とインフレ率の分散の加重平均を最小化するように名目利子率をコントロールする。

制約条件は、IS 曲線とフィリップス曲線である。

$$y_{t+1} = \rho y_t - \sigma(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} \quad (1)$$

$$\pi_{t+1} = \gamma \pi_t + \alpha y_t + \nu_{t+1}, \quad \gamma = 1 \quad (2)$$

ここで、フィリップス曲線は今期のインフレ率が来期のインフレ率を決める、という形になっており、backward-looking であることに注意されたい。つまり、将来の期待が現在の変数に影響を与えるというニュー・ケインジアン・フィリップス曲線ではない。というのも、ニュー・ケインジアン・フィリップ

プス曲線を最初から仮定すると、最適解が一意に定まらないのである。この点については次節で説明する。

さて、フィリップス曲線を使い。インフレ率の期待値を消去しよう。すなわち、

$$E_t \pi_{t+1} = \gamma \pi_t + \alpha y_t$$

これを I S 曲線に代入すれば、

$$\begin{aligned} E_t y_{t+1} &= \rho y_t - \sigma(i_t - \gamma \pi_t - \alpha y_t) \\ &= (\rho + \sigma \alpha) y_t - \sigma i_t + \sigma \pi_t \end{aligned}$$

さてラグランジアンは次のように書ける。

$$L = \dots$$

$$\begin{aligned} &+ E_t \{ y_t^2 + \theta(\pi_t - \pi^*)^2 - \phi_{t+1} [(\rho + \sigma \alpha) y_t - \sigma i_t + \sigma \pi_t - y_{t+1}] \\ &- \mu_{t+1} [\pi_t + \alpha y_t - \pi_{t+1}] \} \\ &+ E_t \beta \{ [y_{t+1}^2 + \theta(\pi_{t+1} - \pi^*)^2 - \phi_{t+2} [(\rho + \sigma \alpha) y_{t+1} - \sigma i_{t+1} + \sigma \pi_{t+1} - y_{t+2}] \\ &- \mu_{t+2} [\pi_{t+1} + \alpha y_{t+1} - \pi_{t+2}] \} + \dots \end{aligned}$$

さて、 y_{t+1} と π_{t+1} と i_t に関する一階条件はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \phi_{t+1} + 2E_t \beta y_{t+1} - E_t \beta \phi_{t+2} (\rho + \sigma \alpha) - E_t \beta \mu_{t+2} \alpha &= 0 \\ E_t \mu_{t+1} + E_t \beta 2\theta(\pi_{t+1} - \pi^*) - E_t \beta \phi_{t+2} \sigma - E_t \beta \mu_{t+2} &= 0 \\ E_t \phi_{t+1} \sigma &= 0, \quad \text{for all } t \end{aligned}$$

3 番目の条件を使って、 ϕ を消去すると、

$$\begin{aligned} 2E_t y_{t+1} - E_t \mu_{t+2} \alpha &= 0 \\ E_t \beta 2\theta(\pi_{t+1} - \pi^*) - E_t \beta \mu_{t+2} + E_t \mu_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

となる。最初の式を使って μ を消去し、一期先にずらすと、

$$E_t \beta y_{t+2} - \alpha \beta \theta E_t (\pi_{t+2} - \pi^*) = E_t y_{t+1} \quad (3)$$

フィリップス曲線も同様に一期先にずらして再掲すると、

$$E_t (\pi_{t+2} - \pi^*) = \alpha E_t y_{t+1} + E_t (\pi_{t+1} - \pi^*) \quad (4)$$

(3) と (4) を連立し、行列で表現すると、

$$\begin{bmatrix} \beta & -\alpha \beta \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t y_{t+2} \\ E_t (\pi_{t+2} - \pi^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t y_{t+1} \\ E_t (\pi_{t+1} - \pi^*) \end{bmatrix} \quad (5)$$

を得る。この行列方程式は逆行列を見つければ容易に解けるが、Blanchard-Kahn の方法を考慮して、発散する固有値を捨てなければならない。

問題 1 (5) を解け。

1. まず、係数行列を左にまとめる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t y_{t+2} \\ E_t(\pi_{t+2} - \pi^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t y_{t+1} \\ E_t(\pi_{t+1} - \pi^*) \end{bmatrix}$$

次に対角化を行う。まず、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta\theta \\ -\alpha\beta & 1 + \alpha^2\beta\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

固有値を λ で表すと、定義により

$$\begin{bmatrix} \beta - \lambda & -\alpha\beta\theta \\ -\alpha\beta & 1 + \alpha^2\beta\theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

特性方程式は、

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\beta - \lambda)(1 + \alpha^2\beta\theta - \lambda) - \alpha^2\beta^2\theta \\ &= \lambda^2 - (1 + \alpha^2\beta\theta + \beta)\lambda + \beta \end{aligned}$$

解は、

$$\lambda = \frac{(1 + \alpha^2\beta\theta + \beta) \pm \sqrt{(1 + \alpha^2\beta\theta + \beta)^2 - 4\beta}}{2}$$

この解の表現から、 $\lambda_1 = 1 + \alpha^2\beta\theta > 1 > \lambda_2 = \beta > 0$ 、であることは直ちにわかる。すなわち、固有値の一つは1より小さく、もう一つは1より大きい。1より小さい固有値は、発散してしまう変数、つまりジャンプ変数に対応している。さて、問題の性質から、GDPギャップはジャンプ変数であり、インフレ率ギャップは先決変数であると考えられる。したがって、将来のインフレ率ギャップは、現在のインフレ率ギャップの、収束する固有値 ($1/\lambda_1 < 0$) の関数として、

$$E_t\pi_{t+2} - \pi^* = \frac{1}{\lambda_1}(E_t\pi_{t+1} - \pi^*)$$

と書ける。さて、フィリップス曲線 (4) を考慮すると

$$\begin{aligned} E_t(\pi_{t+2} - \pi^*) &= \alpha E_t y_{t+1} + E_t(\pi_{t+1} - \pi^*) = \frac{1}{\lambda_1}(E_t\pi_{t+1} - \pi^*) \\ \alpha E_t y_{t+1} &= \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1}(E_t\pi_{t+1} - \pi^*) \end{aligned}$$

であるが、ここに I S 曲線を代入すると

$$\begin{aligned}\alpha E_t y_{t+1} &= \alpha \rho y_t - \alpha \sigma (i_t - E_t \pi_{t+1}) = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} (E_t \pi_{t+1} - \pi^*) \\ \alpha \sigma (i_t - E_t \pi_{t+1}) &= \alpha \rho y_t - \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} (E_t \pi_{t+1} - \pi^*) \\ \alpha \sigma i_t &= \alpha \rho y_t - \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} (E_t \pi_{t+1} - \pi^*) + \alpha \sigma E_t \pi_{t+1} \\ i_t &= E_t \pi_{t+1} - \frac{1 - \lambda_1}{\alpha \sigma \lambda_1} (E_t \pi_{t+1} - \pi^*) + \frac{\rho}{\sigma} y_t \\ i_t &= \pi_t + \alpha y_t - \frac{1 - \lambda_1}{\alpha \sigma \lambda_1} (\pi_t + \alpha y_t - \pi^*) + \frac{\rho}{\sigma} y_t\end{aligned}$$

最終的な答えは、最適なテイラー・ルールを与える。

$$i_t = \pi_t + \left(\frac{\alpha \sigma \lambda_1 - (1 - \lambda_1) + \rho \lambda_1}{\sigma \lambda_1} \right) y_t - \frac{1 - \lambda_1}{\alpha \sigma \lambda_1} (\pi_t - \pi^*) \quad (6)$$

すなわち、テイラー・ルールは中央銀行の最適化問題の解として得られるのである。

2. ストレートに逆行列を求め、以上の解を確認しよう。まず、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta\theta \\ -\alpha\beta & 1 + \alpha^2\beta\theta \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\beta(1 + \alpha^2\beta\theta) - \alpha^2\beta^2\theta} \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2\beta\theta & \alpha\beta\theta \\ \alpha\beta & \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1 + \alpha^2\beta\theta}{\beta} & \alpha\theta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ここで、GDPギャップ（1行目）はジャンプ変数である。したがって、

$$\left(\frac{1 + \alpha^2\beta\theta}{\beta} \right) E_t y_{t+1} + \alpha\theta E_t \Delta\pi_{t+1} = 0$$

ただしここで $\Delta\pi_{t+1} = \pi_{t+1} - \pi^*$ である。ゆえに政策関数は、

$$y_{t+1} = \left(\frac{-\alpha\beta\theta}{1 + \alpha^2\beta\theta} \right) \Delta\pi_{t+1}$$

となる。これを 2 行目に代入すると、

$$\begin{aligned}E_t \Delta\pi_{t+2} &= \beta E_t y_{t+1} + E_t \Delta\pi_{t+1} \\ &= \left(\frac{-\alpha\beta^2\theta}{1 + \alpha^2\beta\theta} \right) E_t \Delta\pi_{t+1} + E_t \Delta\pi_{t+1} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \alpha^2\beta\theta} \right) E_t \Delta\pi_{t+1}\end{aligned}$$

この係数はまさに $\lambda_1 = 1 + \alpha^2\beta\theta$ に他ならない。以下は同様。

2.2 最適テイラー・ルールの性質

さて、(6) で与えられる最適なテイラー・ルールの性質を検討しよう。

まず、最適なテイラー・ルールは中央銀行の目的関数におけるインフレ率ギャップの比重 θ の影響を受けない。すなわち、たとえ中央銀行が GDP をあまり考慮せず狭義のインフレ目標を採用した ($\theta = \infty$) としても、最適テイラー・ルールは GDP ギャップに依存する。

次に、この中央銀行の問題では、伝統的な、backward-looking なフィリップス曲線 (2) を採用している。しかしながら、中央銀行は長期的な最適化問題を解いてテイラー・ルールのパラメーターを獲得している。その意味で、この金利ルールは、forward-looking であると言える。

さらに、見かけ上、forward-looking な金利政策、たとえば、名目金利が一期先の期待インフレ率に依存するような政策は、

$$i_t = \pi_t + q_1(E\pi_{t+1} - \pi^*) + q_2 y_t$$

は、本当に forward-looking と言えるだろうか。実際、インフレ・インデックス債の利回りなどを利用して期待インフレ率を求め、それに依存する政策金利のルールを作ることができる。しかし、ここで経済構造として伝統的フィリップス曲線を考えると、

$$E\pi_{t+1} = \pi_t + \alpha y_t$$

であるから、結局、

$$i_t = \pi_t + q_1(\pi_t - \pi^*) + (q_1\alpha + q_2)y_t$$

となり、現在の変数にのみ依存する表現型が得られる。すなわち、このような政策は最適化問題を解いていないので forward-looking とは言えない。しかしながら、最適化問題を解いているルールとそうでないルールの間に、形式的な差異はないのであり、ある政策が forward-looking かそうでないかは、そう一概に判断できない。

最後に、ゼロ金利制約がある場合の、最適な金利ルールはどうなるだろうか。我が国では、日本銀行が「インフレ率が安定的にゼロを上回るまでゼロ金利を続ける」というルールを宣言している(?) が、これは最適政策の観点からどのように評価すべきであろうか。加藤涼と西山慎一は共同研究 (2006) で、次の 3 点を数値例で示している。非負制約化の金融政策は、

1. 制約なしの金融政策より常に緩和的である。
2. 制約なしの金融政策よりアグレッシブである。
3. インフレや GDP の変化に対して非対称に反応する。

1は、中央銀行が通常のテイラー・ルールより低めの金利を維持することで、ゼロ金利（流動性の罠）に陥りにくくすることを意味する。（← 実際にゼロ金利になっちゃったじゃん！）

2は、GDPやインフレ率の微細な変化でも、中央銀行は即座に対応することを表す。

3は変更幅の問題で、利下げは素早く大きく、利上げはゆっくりと小刻みに、それぞれ行うことを表す。2と3を併せて、非負制約化の金利政策はPre-emptive（先制攻撃的 → 早期警戒的）であると言うことができる。

しばしば、日銀が金利を下げ過ぎたためにゼロ金利に陥ってしまったわけだから、むしろ、平時から利下げはゆっくりと小刻みに行き、いざという時の下げ幅（糊代）を大きめにとっておくべきだ、という議論が行われる。しかし、これは、最適金融政策の枠組みから見て、間違いである。その意味では、グリーンズパンが低金利を長期に継続し過ぎたからバブルが起こったという議論も、正しくない。

3 最適金融政策（ニュー：ケインジアン・モデル）

3.1 「裁量」VS「コミットメント」

3.1.1 金融政策では

まず金融政策の文脈で言えば、こういうことである。デフレに陥っている経済では、中央銀行は、インフレ率が安定的にゼロを上回ってもゼロ金利を解除しないと宣言するのが最適である。しかし、実際にインフレ率がゼロを上回って来た時に、あらためて最適化問題を解くと、ゼロ金利維持は最適でなく、ただちに少々金利を引き上げるのがよい。しかし、この事情を見透かした民間は、中央銀行が長期的にゼロ金利を維持するという約束を信じることができず、その結果、デフレからなかなか脱却できないことになる。

すなわち「コミットメント」とは、いったん約束した政策を、それが最適ではない事態になっても維持し続けることである。他方「裁量」とは、それぞれの時点で最適と思われる政策を行うことであり、前後で辻褄が合わなくなっても気にしないことである。

3.1.2 その他の例

「テロとの戦い」において、人質の命が危険にさらされても決してテロリストの要求には屈しないのがコミットメントである。これに対して「人命は地球より重い」から、人質救済のためある程度テロリストの要求を呑むことは裁量である。

構造改革は、「痛みに耐えて」遂行しなければならない。しかし、実際に痛

みを訴える人が出てきたら、改革をやめるのが最適である。そうしないと選挙に負ける。そこをがんばって、痛みを苦しむ人を無視しても改革を続けるのがコミットメントであり、改革をやめるのは裁量である。

学校教育において、試験の目的は学生に勉強させることである。しかし、実際に試験を行うことは教師にとっても学生にとっても多大の負担である。すなわち、試験当日になったら、試験をしないのが最適である。にもかかわらず約束通り試験を行うのはコミットメントであり、試験をやめるのは裁量である。

同様の例として、赤点の学生が文句を言ってきたとしても決して単位を与えないのはコミットメントであり、要求に屈するのは裁量である。就職が決まっている学生を不可にして留年させるのは、どう考えてもそれ自体として最適でない。しかし、とりあえず単位はやるということにしたら、最初から誰も勉強しない。

3.2 ニュー・ケインジアン・モデル

中央銀行は、伝統的ケインジアン・モデル同様に、次の最適化問題を解く。

$$\min E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t [y_t^2 + \theta(\pi_t - \pi^*)^2]}{2}$$

制約条件は I S 曲線と、NKPC である。

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma(i_t - E_t \pi_{t+1})$$

$$\pi_t = E_t \beta \pi_{t+1} + \alpha y_t$$

ラグランジアンは、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{[y_t^2 + \theta(\pi_t - \pi^*)^2]}{2} + \mu_t (\beta \pi_{t+1} + \alpha y_t - \pi_t) \right\} \\ &= \frac{[y_0^2 + \theta(\pi_0 - \pi^*)^2]}{2} + \mu_0 (E_0 \beta \pi_1 + \alpha y_0 - \pi_0) + \dots \\ &\quad + E_0 \beta^{t-1} \left\{ \frac{[y_{t-1}^2 + \theta(\pi_{t-1} - \pi^*)^2]}{2} + \mu_{t-1} (\beta \pi_t + \alpha y_{t-1} - \pi_{t-1}) \right\} \\ &\quad + E_0 \beta^t \left\{ \frac{[y_t^2 + \theta(\pi_t - \pi^*)^2]}{2} + \mu_t (\beta \pi_{t+1} + \alpha y_t - \pi_t) \right\} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

単純化のため $\pi^* = 0$ と仮定し、 y_t と π_t に関し一階条件を求めると、次のようになる。

$$E_0 y_t + \alpha E_0 \mu_t = 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$E_0 \mu_{t-1} \beta + E_0 \theta \pi_t - E_0 \beta \mu_t = 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$\theta \pi_0 - \mu_0 = 0, \quad t = 0. \quad (9)$$

(7) を (8)、(9) に代入することによって、

$$\theta\pi_t + \frac{1}{\alpha}(y_t - y_{t-1}) = 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\theta\pi_0 + \frac{y_0}{\alpha} = 0 \quad (11)$$

を得る。すなわち、時点ゼロの最適政策と、時点1以降の最適政策は形が違うのである。すなわち、時点 t において政策(10)を実施すると約束していても、実際に時点 t が到来すると、その時点では政策(11)を実施するのが最適である。すなわち、最適政策(10)は「動学的に最適でない (dynamically inconsistent)」あるいは「subgame perfect でない」と言われる。もちろん、政策(11)は時点ゼロ以外では最適ではないことは明らかである。

言いかえれば、経済構造がニュー・ケインジアン・モデルであれば、一般に最適政策は存在しない。ただ、目的関数を最大化するのに、どの政策が他よりマシか(次善)、が問題となるだけである。もっとも単純な次善政策は、政策(10)か政策(11)のどちらかを、時点にかかわらず実施することである。すなわち $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ として、コミットメント政策 (timeless perspective) を次のように定義しよう。

$$\theta\pi_t + \frac{1}{\alpha}(y_t - y_{t-1}) = 0. \quad (12)$$

これに対して、裁量的政策 (discretion) を次のように定義する。

$$\theta\pi_t + \frac{y_t}{\alpha} = 0. \quad (13)$$

シミュレーション分析によって、広範なパラメーターの下で、コミットメント政策は裁量的政策より良好な(より大きな目的関数の値を与える)パフォーマンスを示すことが知られている。

コミットメント政策のもう一つの特徴として、「歴史依存性 (history dependence)」が挙げられる。前節で示したように、経済構造が伝統的ケインジアン・モデルである場合には、最適金融政策の下で、GDPギャップはジャンプ変数である。これに対して経済構造がニュー・ケインジアンである場合に、中央銀行がコミットメント政策を採用すると、GDPギャップは前期の値に依存する先決変数となり、粘着性(慣性)を示すことが知られている。同様に、政策金利も前期の値に依存してゆっくりと変化する。これら、政策ルールによってGDPや金利に慣性が生まれることを、「歴史依存性」と言う。